有限长度离散信号的正交模态分解方法

李宁
(南京工程学院)
zdhxln@njit.edu.cn

李乐之
(ML Collective)
lli2@gsd.harvard.edu

摘要：本文提出了一种正交模态分解方法，在复平面实轴和虚轴同时对有限长度的实信号进行本征模态分解。构造了有限长度离散信号的插值函数空间，分析了插值函数空间以及它的各子空间的维数与插值函数的频带宽度的关系，论证了本征模态实际上就是其内禀瞬时频率恒为正（或恒为负）的窄带信号，从而将本征模态分解问题变成为插值函数空间到其低频子空间或窄带子空间的正交投影问题。正交模态分解方法是一种局部的时频域算法，每一次运算提取某一个特定的模态。在精确的本征模态的定义下得到的全局分解结果具有唯一性。正交模态分解方法的计算量显著小于传统的模态分解方法。

关键词：模态分解；瞬时频率；正交投影

Abstract： In this paper, an orthogonal mode decomposition method is proposed to decompose finite length real signals on both the real and imaginary axes of the complex plane. The interpolation function space of finite length discrete signal is constructed, and the relationship between the dimensionality of the interpolation function space and its subspaces and the band width of the interpolation function is analyzed. It is proved that the intrinsic mode is actually the narrow band signal whose intrinsic instantaneous frequency is always positive (or always negative). Thus, the eigenmode decomposition problem is transformed into the orthogonal projection problem of interpolation function space to its low frequency subspace or narrow band subspace. Orthogonal mode decomposition method is a local time-frequency domain algorithm, which extracts a specific mode at each operation. The global decomposition results obtained under the precise definition of the eigenmodes are unique. The computational cost of the orthogonal mode decomposition method is significantly less than that of the traditional mode decomposition method.

Key word：mode decomposition,instantaneous frequency，orthogonal projection

1 引言

时频域分析方法 (TF) 对于处理非平稳的时间序列信号有十分重要的作用，早期的时频域分析有短时傅里叶变换和小波变换 [6]。

1998 年 Huang 等人 [6] 提出了经验模态分解 (Empirical Mode Decompositon, EMD) , EMD 算法从高频分量到低频分量递归地提取信号的基本模态。具体的过程是：找到信号的所有极大值点和极小值点，

通过插值法，将所有极大值点连接成为上包络线，将所有极小值点连接成为下包络线，求取上下包络线的平均值曲线，将平均值曲线作为“低频分量”移除，剩余部分即为一个基本模态函数（Intrinsic Mode Function IMF)，继续在被移除的“低频分量”上递归地重复上述过程，就可完成其余的模态的提取。经验模态分解方法在时频域分析中获得了广泛应用，然而由于其缺乏严格的数学原理，无法避免各个模态间存在混频现象。而且 EMD 算法是基于递归的全局性的模态分解方法，该方法不能只提取某个特定的模态。

2014 年 Dragomiretskiy 等提出了变分模态分解方法 [4](Variational Mode Decomposition, VMD)，VMD 是自适应非递归的模态分解方法，首先指定信号的模态分解层数，通过在频域求解变分方程，自适应地匹配各个模态的中心频率和带宽，可以实现各模态的分解。VMD 方法具有严格的数学理论基础，一定程度上克服了模态间混叠的问题。但是 VMD 的模态分解层数的选取是至关重要的，如果模态分解层数过大，会导致某些模态裂解，反之若模态分解层数过小，则会使得多个模态叠在一起，不能得到有效分解。VMD 算法虽然是非递归的，但也是一种全局性的模态分解方法，不能只提取某个特定的模态。

把一个实信号 $\boldsymbol{u}$ 包含的各种模态的集合称为它的模态集，模态集是实信号 $\boldsymbol{u}$ 的特性的体现，应当具有唯一性，最好还是正交的。但是，采用 EMD 和 VMD 得到的实信号模态集并不是唯一的，也不满足正交性。

本文将介绍一种新的有限长度离散实信号的模态分解算法，使用这一方法得到的模态集具有唯一性和正交性，这一方法命名为正交模态分解方法。这样的模态集称为本征模态集。与现有方法相比，本文的模态分解方法有以下优势：

1. 本文给出的模态分解方法基于正交投影算法，原始信号内含的所有模态是正交的。

2. 与正交性相伴随的是模态全局分解的唯一性，对模态的精确定义，保证了所有的模态在频域中都有明确的中心位置和宽度，模态之间没有重叠。

3. 本文给出的模态分解算法基于明确的数学原理。

4. 与 EMD 和 VMD 不同，正交模式分解方法并不基于全局分解，因而允许只关注和提取某一个感兴趣的模态，而无需将所有模态全部提取，从而大大降低了计算量。

5. 通过实际算例表明，即使在时间段的两端，也能保持较好的模态分解精度，基本克服了传统的模态分解方法所固有的“边界效应”。

本文将以以下方式展开：首先我们将在第2节讨论模态的定义，即本文提出的分解方法的理论基础；接下来在第3节中，介绍基于正交投影提取模态的原理和方法，使用该方法得出的信号模态组具有唯一性和正交性。第4节会详细介绍计算信号的内禀相位函数和瞬时频率的具体算法，由此可确定模态的在频域里的边界。第5节讨论搜索模态的中心频率的方法。第6节讨论利用重采样技术剥离原始信号中的低频非震荡分量的方法。以上均辅以算例进行说明。第7段中我们将本文提出的方法与以往的方法进行比较，论述其优越性。本文的所用算例，都有 python3.8 的程序，可以通过作者的邮箱获取。

2 什么是模态？

模态分解的唯一性，是建立在对模态的精确定义的基础上的。本段讨论模态的定义，该定义是本文模态分解的方法的理论基础。

自从 1998 年 Huang 等人 [6] 提出了经验模态分解 EMD 以来，模态分解的方法在心电图分析、地震研究、气候研究、机械故障诊断、经济统计分析等等方面获得了广泛的应用，但是关于模态的定义却一直

在讨论着。对于模态的原始的定义是 [2, 6]：1) 在整个时程内极值点个数与过零点个数相等或最多相差 1，2) 由所有最大值和所有最小值构成两条包络线，这两条包络线在任一点上的均值都为零。

在后续的工作中，特别是在变分模态分解 VMD 的理论中，对于模态的定义有了一些微小变化，认为模态 $m_i(t)$ 是调频调幅函数 [4, 3, 8]:

$$m_i(t) = A_i(t)cos(\Phi_i(t)), i = 1, \ , M$$

其中 $A_i(t)$ 是模态的幅值，$\Phi_i(t)$ 是其相位。并且 $A_i(t)$ 和 $\Phi_i(t)$ 的变化率都是较小的 [4, 8]。

一些文献针对以上的两种定义进行了讨论，认为关于模态的后一种定义比第一种的定义严更格 [4, 3, 10]。事实上，上面的两种定义都是描述性的，有一定的不确定性。从实际应用的角度来看，无论根据哪一种定义的模态都是窄带函数，模态的傅里叶频带宽度是受限的。但如何限定模态的带宽，在 EMD 相关的理论中并没有讨论这个问题，正是因为 EMD 模态带宽的不确定性造成了模态间的混叠 [4, 10]。在 VMD 算法中，分解的模态层数是人为指定的，通过迭代求解频域里的变分方程来得到指定个数的模态，VMD 得出的模态一般是调频调幅函数，关于模态的第二种定义由此而来。VMD 在一定程度上解决了各个模态之间频带重叠的问题，但是 VMD 算法不能准确指定感兴趣的 IMF 的频谱位置 [5]。上述两种关于模态的定义，都缺少对模态本身的带宽和与带宽相关联的特性的明确限定，因而分解得出的模态组不具有唯一性。

尽管采用以往的模态分解方法得出的结果不具有唯一性，但仍然在处理非平稳信号时发挥了重要作用 [9]，这是因为模态的频率成分简单，在一定程度上可以认为模态是一种平稳信号，采用希尔伯特变换求出模态的相位函数，可以在整个时间范围内保持相位函数单调，使得模态的瞬时频率具有实际意义，而对于频率成分复杂的信号就不能做到这一点。在保证其相位函数单调的前提下，把最多的频率分量合在一起，这就形成了精确意义上的模态。

计算相位函数和瞬时频率，成为精确提取模态的关键。

3 基于正交投影提取模态

3.1 与有限长度的离散信号具有相同带宽的插值函数

实际的离散时域实信号均为有限长度的，对于有限长度的离散时域实信号（时间序列信号）的讨论具有重要的理论和实际意义。

有限长度的离散时域实信号 $\boldsymbol{u} = [u(-l), u(-l+1), \ldots, u(0), \ldots, u(l-1), u(l)]$，$\boldsymbol{u}$ 的长度是 $2l+1$, 令 $n = 2l+1$ ，则有 $\boldsymbol{u} \in R^n$, R^n 是实数域 n 维向量空间。离散实信号 $\boldsymbol{u}$ 的采样时间间隔是 Δ, 时间总长度是 $T = (n-1)\Delta$ 。以数列 $\boldsymbol{u}$ 构造其插值函数 $\Psi_u(t)$：

$$\Psi_u(t) = \sum_{k=-l}^{l} u(k) \frac{\sin \Omega_\Delta (t - k\Delta)}{\Omega_\Delta (t - k\Delta)} \tag{1}$$

其中 $t \in (-\infty, \infty)$, $\Omega_\Delta = \pi/\Delta$。显然有：

$$\Psi_u(k\Delta) = \begin{cases} u(k) & \text{if } k = -l, (-l+1), \ldots, 0, \ldots, (l-1), l \\ 0 & \text{if } k > l \text{ or } k < -l. \end{cases} \tag{2}$$

算例 0: 在算例 0 中，如图1所示随机的离散实信号 $\boldsymbol{u}$ 的长度是 21，其时域区间是 $[-30, 30]$. 根据公式1生成其插值连续函数 $\Psi_u(t)$, and $\Psi_u(t)$ 的主值区间也是 $[-30, 30]$.

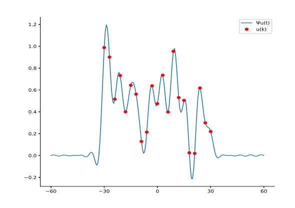


图 1: $U_u(\omega)$ and $U_{\Omega_\Delta}(\omega)$

一般地，$\Psi_u(t)$ 是在无限区间 $(-\infty,\infty)$ 上定义的函数，但其主值支撑区间是 $[-l\Delta, l\Delta]$，在主值区间以外 $\Psi_u(t)$ 趋于零。$\Psi_u(t)$ 的能量集中于主值区间。

对 $\Psi_u(t)$ 做傅里叶变换：

$$\begin{aligned} F[\Psi_u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_u(t) e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-l}^{l} u(k) \frac{\sin \Omega_\Delta (t-k\Delta)}{\Omega_\Delta (t-k\Delta)} e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \sum_{k=-l}^{l} u(k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega_\Delta t'}{\Omega_\Delta t'} e^{-j\omega(t'+k\Delta)}\,dt' \\ &= \sum_{k=-l}^{l} u(k) e^{-j\omega k\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega_\Delta t}{\Omega_\Delta t} e^{-j\omega t}\,dt = U_u(\omega) U_{\Omega_\Delta}(\omega) \end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$U_{\Omega_\Delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega_\Delta t}{\Omega_\Delta t} e^{-j\omega t}\,dt = \begin{cases} \Delta & |\omega| <= \Omega_\Delta \\ 0 & |\omega| > \Omega_\Delta \end{cases} \tag{4}$$

$$U_u(\omega) = \sum_{k=-l}^{l} u(k) e^{-j\omega k\Delta} \tag{5}$$

如图2所示，$U_u(\omega)$ 是周期为 $2\Omega_\Delta$ 的频域函数，$U_{\Omega_\Delta}(\omega)$ 是频域窗口函数。$\Psi_u(t)$ 的带宽取决于 $U_u(\omega)$ 的主瓣的截止频率 Ω_c，显然 Ω_c 小于 $\Omega_\Delta = \frac{\pi}{\Delta}$。有限长度离散信号 u 的带宽与连续函数 $\Psi_u(t)$ 的带宽是相同的，$\Psi_u(t)$ 在频域也是能量集中的函数。

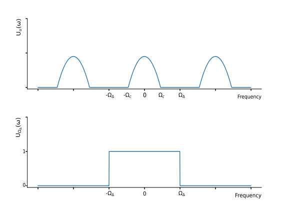


图 2: $U_u(\omega)$ 和 $U_{\Omega_\Delta}(\omega)$ 分别是频域周期函数和窗口函数

把全体插值函数 $\Psi_u(t)$ 的集合记为 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$，对于 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$ 中的插值函数 $\Psi_u(t)$，其频带宽度均小于 $\Omega_\Delta = \frac{\pi}{\Delta}$，原始信号 $\boldsymbol{u}$ 的采样点数为 $n = 2*l+1$，插值函数 $\Psi_u(t)$ 的频域最小分辨单位是 $\epsilon = \frac{\pi}{l\Delta}$。由于 $\Psi_u(t) \in \boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$ 与实信号 $\boldsymbol{u} \in R^n$ 是一一对应的，可知 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$ 与 R^n 同构。可取函数组

$$\{1, \sin\frac{\pi t}{l\Delta}, \cos\frac{\pi t}{l\Delta}, \ldots, \sin\frac{i\pi t}{l\Delta}, \cos\frac{i\pi t}{l\Delta}, \ldots, \sin\frac{\pi t}{\Delta}, \cos\frac{\pi t}{\Delta}\}$$

为 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$ 的正交基。基函数组是由单频函数组成的，$\Psi_u(t) \in \boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$，都可以唯一地用这些单频函数的线性组合来表达，但是这并不是希望的模态分解。因为在实际的信号分析中，一些包含了多个频率成分的模态往往对应着实际系统中特定的物理特性。不应将模态分裂成单频分量 [11]。

3.2 基于正交投影的模态提取方法

考虑到频域分辨率，取 $\Omega_{c1} = \frac{i\pi}{l\Delta}$ ，$\Omega_{c2} = \frac{m\pi}{l\Delta}$，i 和 m 都是正整数，且 $i < m < l$ ，位于频带 Ω_{c1}, Ω_{c2} 的所有窄带函数构成 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$ 的子空间 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta,\Omega_{c2}-\Omega_{c1})}}$ 。上面提及的 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$ 的正交基函数组的一个子组，构成了 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta,\Omega_{c2}-\Omega_{c1})}}$ 的正交基:

$$\{\sin\frac{i\pi t}{l\Delta}, cos(\frac{i\pi t}{l\Delta}), \ldots, \sin\frac{m\pi t}{l\Delta}, cos\,(\frac{m\pi t}{l})\} \tag{6}$$

由所有采样点构成的时间向量为 $\boldsymbol{t} = [-l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l]\Delta$。将时间向量 $\boldsymbol{t}$ 代入正交基函数组（式6）中的每一个基函数中，可得 $p = m - i + 1$ 列 n 维列向量:

$$[sin(-v\pi), cos(-v\pi), \ldots, sin(-\frac{v\pi}{l}), cos(-\frac{v\pi}{l}), 1, sin(\frac{v\pi}{l}), cos(\frac{v\pi}{l}), \ldots, sin(v\pi), cos(v\pi)]^T$$

其中 $v = i, i+1, ..., m-1, m$。以这 p 个 n 维列向量构建 $n \times p$ 阶矩阵 Γ，可得从 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$ 到其子空间 $\boldsymbol{IFS_{(n,\Delta,\Omega_{c2}-\Omega_{c1})}}$ 的正交投影矩阵 $\Gamma(\Gamma^T\Gamma)^{-1}\Gamma^T$。对于所有的 $\boldsymbol{u}$ 及 $\Psi_u(t) \in \boldsymbol{IFS_{(n,\Delta)}}$，利用正交投影可求其位于频带 $[\Omega_{c1}, \Omega_{c2}]$ 的模态 $\Psi_u^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}$:

$$\Psi_u^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]} = \Gamma(\Gamma^T\Gamma)^{-1}\Gamma^T\boldsymbol{u} \tag{7}$$

利用（式7）给出的基于正交投影的模态提取方法，是提取个体模态的方法，只需提取任何感兴趣的模态，而不需要考虑其它模态。

问题至此并没有完全解决，很自然的疑问是：频带区间 $[\Omega_{c1}, \Omega_{c2}]$ 是如何确定的？如何知道这个频带区间覆盖了一个完整的模态？在本文第 2 段中，我们讨论了在保证其相位函数单调的前提下，把最多的频率分量合在一起，这就形成了精确意义上的模态，而这也是解决此问题的关键。接下来，我们将介绍计算相位函数和瞬时频率的具体方法。

4 有限长度的离散信号的内禀相位函数和瞬时频率

在以傅里叶变换为基础的传统频谱分析中，频率是时间无关的量，频率实质是有限长度信号的总体特征。傅里叶频率对于表征平稳信号的特征是有效的，但是对于实际中存在的非平稳信号，其频率是随时间变化的，傅里叶频率就不再适合了。为了表征非平稳信号的局部特征，引进了相位函数和瞬时频率的概念 [1, 7], 具体如下:

对于一般实信号，为了符号统一起见，仍将其记作 $\Psi_u(t)$。构造关于 $\Psi_u(t)$ 的解析信号:

$$z(t) = \Psi_u(t) + jH\{\Psi_u(t)\} = a(t)e^{j\Theta(t)}$$

$H\{\Psi_u(t)(t)\}$ 是 $\Psi_u(t)$ 的希尔伯特变换，如 $\Psi_u(t)$ 是单频率函数，$H\{\Psi_u(t)\}$ 就相当于是 90 度移相器，对正频率产生负 90 度的相移，对负频率产生正 90 度的相移。$a(t)$ 是信号的时变幅值，$\Theta(t)$ 是信号的相位函数，$\Theta(t)$ 的一阶导数 $\theta'(t)$ 为瞬时频率 [2, 6, 4]。

瞬时频率对于分析和理解非平稳信号有着重要意义，但瞬时频率的计算是困难的 [8, 7]，为了解决解决这个问题，在参考文献 [7] 中，提出了采用直接积分法来获得原始实信号 $\Psi_u(t)$ 的 $-90°$ 的相位移，使

得无需进行希尔伯特变换也可得到解析信号 z(t)，从而可近似计算实信号 $\Psi_u(t)$ 的瞬时频率。对瞬时频率的真正物理意义和计算方法的探讨一直在进行中，仍然有较大的研究空间 [2, 7]。

本文提出了基于信号的奇偶分量分解，求取信号的内禀相位函数和内禀瞬时频率的方法，具有计算简单，物理意义明确的特点，在典型的算例中，与采用希尔伯特变换得出的结果是相同的。

对所有的 $\boldsymbol{u} = [u(-l), u(-l+1), \ldots, u(0), \ldots, u(l-1), u(l)], \boldsymbol{u} \in R^n$，令 $\boldsymbol{u_{inv}}$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的倒序排列，即 $\boldsymbol{u_{inv}} = [u(l), u(l-1), \ldots, u(0), \ldots, u(-l+1), u(-l)]$。令：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_e} &= 0.5(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u_{inv}}) \\ \boldsymbol{u_o} &= 0.5(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_{inv}}) \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u_e} + \boldsymbol{u_o} \end{aligned} \tag{8}$$

称这样的分解是对离散信号 $\boldsymbol{u}$ 的奇偶分解，$\boldsymbol{u_e}$ 是偶序列分量，$\boldsymbol{u_o}$ 是奇序列分量，且有：

$$\begin{cases} u_e(-k) = u_e(k) \\ u_o(-k) = -u_o(k) \end{cases} \qquad k = 1, 2, ..., l, \text{ 且} \qquad \begin{cases} u_e(0) = u(0) \\ u_o(0) = 0 \end{cases}$$

分别对 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u_e}$ 和 $\boldsymbol{u_o}$ 构造插值函数 $\Psi_u(t)$，$\Psi_{u_e}(t)$, $\Psi_{u_o}(t)$，有 $\Psi_u(t) = \Psi_{u_e}(t) + \Psi_{u_o}(t)$，$\Psi_{u_e}(t)$ 是偶函数，$\Psi_{u_o}(t)$ 是奇函数。分别对 $\Psi_{u_e}(t)$，$\Psi_{u_o}(t)$ 做傅里叶变换可得：

$$F[\Psi_{u_e}(t)] = [u(0) + \sum_{k=1}^{l} 2u_e(k)\cos(\omega k\Delta)]U_{\Omega_\Delta}(\omega),$$

$$F[\Psi_{u_o}(t)] = -j[\sum_{k=1}^{l} 2u_o(k)\sin(\omega k\Delta)]U_{\Omega_\Delta}(\omega)$$

$\Psi_{u_e}(t)$ 的傅里叶变换是实函数，将其记为 $Fre(\omega)$；$\Psi_{u_o}(t)$ 的傅里叶变换则是纯虚函数，将其记为-$jFim(\omega)$。因此也将 $\boldsymbol{u_e}$ 称为原始信号 $\boldsymbol{u}$ 的实轴分量，将 $Fre(\omega)$ 称为 $\boldsymbol{u}$ 的实轴频谱，将 $\boldsymbol{u_o}$ 称为 u 的虚轴分量，将 $Fim(\omega)$ 称为 $\boldsymbol{u}$ 的虚轴频谱，合在一起可写为：

$$F[\Psi_u(t)] = Fre(\omega) - jFim(\omega)$$

可以认为，$\Psi_{u_o}(t)$ 相对于 $\Psi_{u_e}(t)$，具有 -90° 的相位移。如果 $\Psi_{u_e}(t)$ 和 $\Psi_{u_o}(t)$ 都不为零，则定义 $\Psi_u(t)$ 的幅值 $A(t)$ 和相位 $\varphi(t)$ 如下：

$$A(t) = \sqrt{\Psi_{u_e}^2(t) + \Psi_{u_o}^2(t)}$$

$$\varphi(t) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Psi_{u_o}}{\Psi_{u_e}}\right)$$

定义瞬时频率为：

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\Psi'_{u_e}(t)\Psi_{u_o}(t) - \Psi'_{u_o}(t)\Psi_{u_e}(t)}{A^2(t)}$$

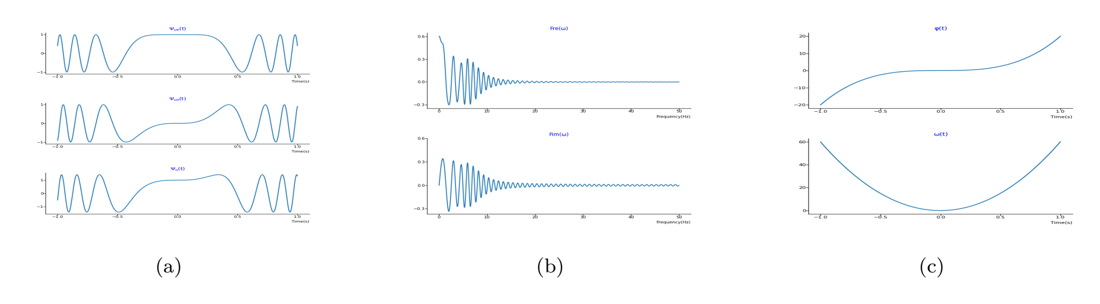
如果 $\Psi_u(t)$ 是纯偶函数，$\Psi_{u_o}(t) = 0$, $\Psi_u(t) = \Psi_{u_e}(t) = \sum_{i=0}^{l} c_i \cos\left(\frac{i\pi t}{l\Delta}\right)$，其中 $c_i | i = 0, 1, \cdot\cdot l$ 是实系数。可以认为地在定义一个与 $\Psi_{u_o}(t)$ 正交的奇函数 $f_q(t) = \sum_{i=1}^{l} c_i \sin\left(\frac{i\pi t}{l\Delta}\right.$，以此 $f_q(t)$，代替 $\Psi_{u_o}(t)$，用于相位函数和瞬时频率的计算。

如果 $\Psi_u(t)$ 是纯奇函数，$\Psi_{u_e}(t) = 0$, $\Psi_u(t) = \Psi_{u_o}(t) = \sum_{i=1}^{l} c_i \sin\left(\frac{i\pi t}{l\Delta}\right)$，其中 $c_i | i = 1, \cdot\cdot l$ 是实系数。可以人为地再定义一个与 $\Psi_{u_o}(t)$ 正交的偶数函数 $f_d(t) = \sum_{i=1}^{l} c_i \cos\left(\frac{i\pi t}{l\Delta}\right.$，以此 $f_d(t)$ 代替 $\Psi_{u_e}(t)$，用于相位函数和瞬时频率的计算。

上面的定义中，实信号 $\boldsymbol{u}$ 的瞬时频率 $\omega(t)$ 与实轴分量 $\Psi_{u_e}(t)$ 和虚轴分量 $\Psi_{u_o}(t)$ 有关，还与其时变的幅值 $A(t)$ 有关，故称 $\omega(t)$ 是实信号的内禀瞬时频率。一些文献认为，时域信号的瞬时频率始终为正才是有实际意义的 [2, 6]，下面给出一些算例。

算例 1： $\Psi_u(t) = sin(20t^3) + cos(20t^3), t \in [-1, 1]$, 以 100Hz 的频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。

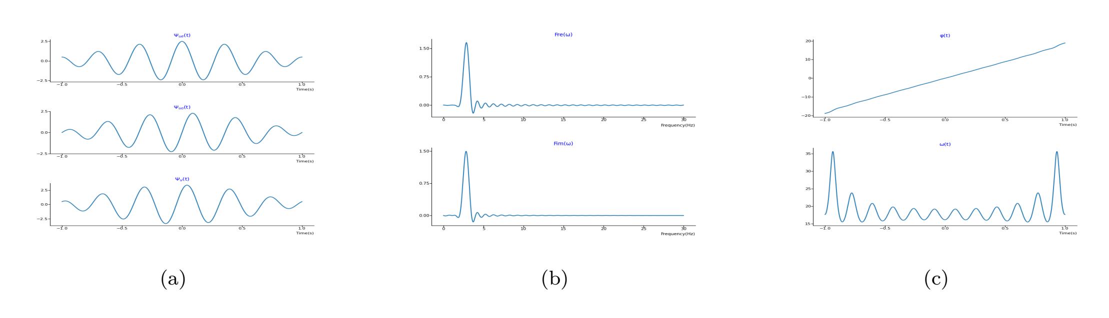
在算例 1 中，$\Psi_u(t)$ 的实轴分量和虚轴分量如图3(a)，实轴频谱和虚轴频谱，如图3(b)，$\Psi_u(t)$ 的相位函数、内禀瞬时频率，如图3(c)。信号的傅里叶频带宽度为 0Hz $\sim$ 15Hz，图3(c) 显示其内禀相位为三次函数，是单调的，内禀瞬时频率为二次函数，始终为正，$\Psi_u(t)$ 是一个模态。



(a) (b) (c)

图 3: 算例 1 中 $\Psi_u(t)$ 的内禀瞬时频率恒为正，$\Psi_u(t)$ 是一个模态

算例 2： $\Psi_u(t) = 1.3sin(6\pi t) + sin(5\pi t) + 1.5cos(6\pi t) + cos(5\pi t), t \in [-1, 1]$, 以 100Hz 的频率采样。



(a) (b) (c)

图 4: 算例 2 中虚实轴频谱均只有一个主瓣,$\Psi_u(t)$ 的是一个模态

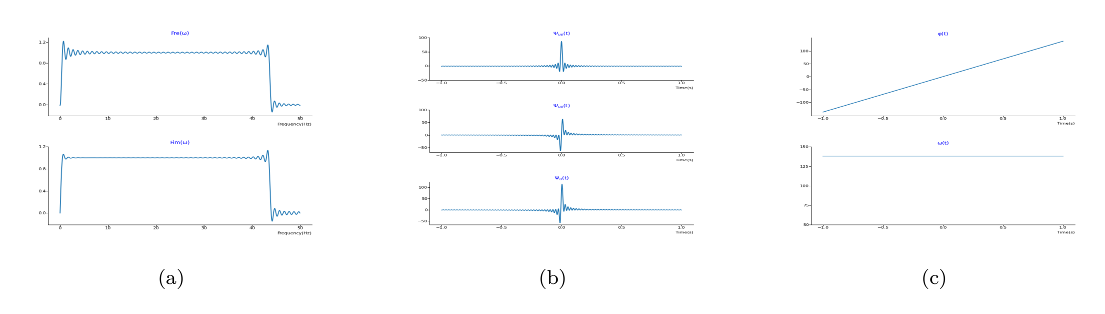
图 4(a) 表明，算例 2 中的 $\Psi_u(t)$ 及其实轴分量 $\Psi_{u_e}(t)$ 和虚轴分量 $\Psi_{u_o}(t)$ 都是调幅函数，图 4(b) 表明，$\Psi_u(t)$ 的实轴频谱 $Fre(\omega)$ 和虚轴频谱 $Fre(\omega)$ 都只有一个主瓣，图 4(c) 表明，相位函数 $\varphi(t)$ 是单调函数，内禀瞬时频率 $\omega(t)$ 是恒为正的函数，$\Psi_u(t)$ 可被看做一个模态

算例 3： $\Psi_u(t) = \sum_{f=1}^{87}[sin(f\pi t) + cos(f\pi t)], t \in [-1, 1]$, 以 100Hz 的频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。

图5(a) 表明，算例 3 中 $\Psi_u(t)$ 的傅里叶频谱宽度是 0.5Hz~43.5Hz，但图4(c) 表明 $\Psi_u(t)$ 却有恒定的内禀瞬时频率 22Hz（138.16rad/s），内禀瞬时频率位于傅里叶频谱的几何重心。图4(b) 显示 $\Psi_u(t)$ 是时域中的能量集中的信号，可以证明算例 3 中的 $\Psi_u(t)$ 满足小波函数的定义。

以上算例中，均是基于信号的奇偶分解来计算内禀瞬时频率的。如果采用传统的希尔伯特变换解析函数方法来计算，可以得出相同的结果。但基于信号的奇偶分解来计算内禀相位和内禀瞬时频率，其复杂程度较小。

“在整个时间范围内保持其内禀相位函数单调”可以当做确定某个模态所占据的频带的最大宽度的依据，但是还存在着如何确定中心频率的问题，事实上利用前面提到的实轴频谱 $Fre(\omega)$ 和虚轴频谱 $Fre(\omega)$ 可以比较准确地定位模态的中心频率。



(a) (b) (c)

图 5: 算例 3 中 $\Psi_u(t)$ 的内禀中瞬时频率位于傅里叶频谱的几何重心

5 搜索模态

模态是窄带函数，如果确定了模态的中心频率和带宽，就回答了在本文第3.2段末尾处中所提出的问题。事实上，利用信号的虚实轴频谱可以确定模态的中心频率，通过计算信号的内禀相位函数和内禀瞬时频率，可以确定模态的带宽。

5.1 信号的虚实轴频谱的作用

结合具体的计算实例，可以了解有限长度的离散信号的实轴频谱和虚轴频谱的一些性质，利用虚实轴频谱的比对，有助于准确地定位模态的中心频率。

算例 4： $\Psi_u(t) = 1.3sin(5\pi t) + sin(12\pi t) + cos(4\pi t) + cos(13\pi t), t \in [-1, 1]$, 以 100Hz 的频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。

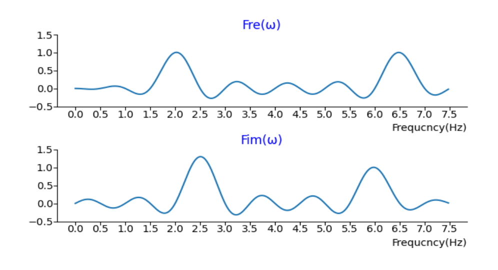
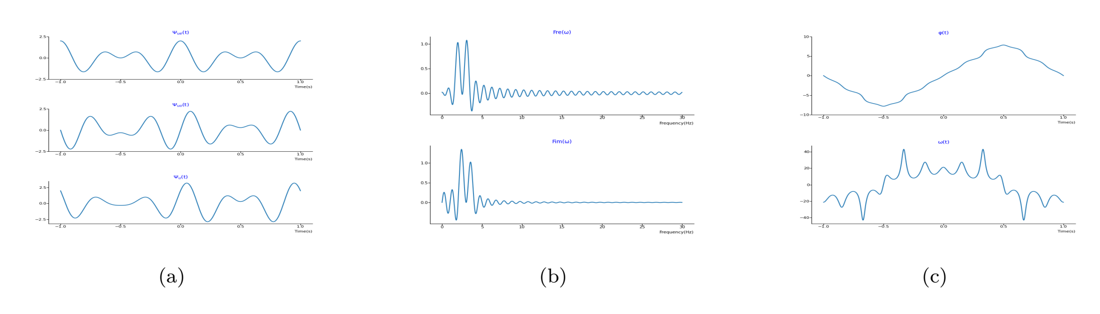


图 6: 算例 4 中 $\Psi_u(t)$ 的实轴频谱和虚轴频谱分别有两个主瓣

在算例 4 中，$\Psi_u(t)$ 的实轴频谱 $Fre(\omega)$ 和虚轴频谱 $Fim(\omega)$，如图6。$Fre(\omega)$ 的两个主瓣分别对应着实轴单谐波分量 $cos(4\pi t)$ 和 $cos(13\pi t)$，$Fim(\omega)$ 的两个主瓣分别对应着虚轴单谐波分量 $sin(5\pi t)$ 和 $sin(12\pi t)$ $\Psi_u(t)$ 的持续时间 2 秒，故 $Fre(\omega)$ 和 $Fim(\omega)$ 频域的最小分辨单位 ϵ 是 0.5Hz，图 5 中，主瓣的支撑区间宽度都是 1Hz，是频域最小分辨单位 ϵ 的 2 倍，而所有旁瓣的正负半波的宽度都是 0.5Hz，等于频域分辨单位 ϵ。可以证明，当原始信号包含的各个单谐波在频带上相差较远时，上面所说的关于主瓣和旁瓣宽度的结论，具有普遍意义。

算例 5： $\Psi_u(t) = 1.3sin(5\pi t) + sin(7\pi t) + cos(4\pi t) + cos(6\pi t), t \in [-1, 1]$, 以 100Hz 的频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。实轴频谱 $Fre(\omega)$ 和虚轴频谱 $Fim(\omega)$，如图 7 (b)。实轴上的谐波分量是 $cos(4\pi t)$ 和 $cos(6\pi t)$，其频差是 1Hz，是本算例中频域最小分辨单位 ϵ 的 2 倍；虚轴上的谐波分量是 $1.3sin(5\pi t)$ 和 $sin(7\pi t)$，其频差也是 1Hz，也是频域最小分辨单位 ϵ 的 2 倍。实轴频谱和虚轴频谱能够分别显示各单谐波分量对应的主瓣, 如图7 (b) 所示。图7 (c) 显示示相位函数 $\varphi(t)$ 不单调，这正是由于 $\Psi_u(t)$ 内含的各个单谐波分量在

频域里相距稍远而导致的。本算例中，所有单频率分量都是独立的模态。



(a) (b) (c)

图 7: 算例 5 中虚实轴频谱能分辨相应的谐波而相位函数不单调

在信号的实轴频谱和虚轴频谱中，若存在宽度大于频域分辨单位 ϵ 的 2 倍的主瓣，其中必包含多个谐波成分。有限长度实信号中包含的每个模态实际对应着信号的实虚轴频谱中的一个独立的主瓣或几个部分重叠的主瓣, 可根据频谱中的主瓣的位置来确定模态的中心频率。

5.2 求取模态的频域边界

对于在频谱中存在的孤立的主瓣，主瓣的支撑区间的宽度就是其对应的模态的频域宽度。

对于几个部分重叠的主瓣，则需要以其中一个主瓣的支撑区间宽度作为模态频率带宽的初始值，再经过迭代来确定模态所占频带的实际边界。在迭代的过程中，不断有新的频率分量加入进来。每次迭代都需要在时域计算其相位函数。只要相位函数仍保持单调性，迭代就一直进行。直到发现相位函数的不再具有单调性了，迭代即停止。这时就最大程度地实现了属于这个模态的所有频率分量的求和，找到了这个模态。从频域的角度来看，这样的操作就是找到了模态对应的频率区间。具体的计算步骤如下：

1. 根据信号 $\Psi_u(t)$ 的 $Fre(\omega)$ 和虚轴频谱 $Fim(\omega)$，确定其中某个感兴趣的主瓣的频带 $[\Omega_{c1}, \Omega_{c2}]$。

2. 利用本文（式7）给出的正交投影算子，求出 $\Psi_u(t)$ 在频段内的分量 $\Psi_u^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}(t)$。

3. 求出 $\Psi_u^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}(t)$ 的内禀相位函数 $\varphi^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}(t)$ 和内禀瞬时频率 $\omega^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}(t)$。

4. 将频带下限由 Ω_{c1} 改变为 $\Omega_{c1}-\epsilon$，在扩展的频带 $[\Omega_{c1}-\epsilon, \Omega_{c2}]$ 中重复步骤上述 2 到步骤 3，计算出频带扩展后的内禀相位函数 $\varphi^{[\Omega_{c1}-\epsilon,\Omega_{c2}]}(t)$ 和内禀瞬时频率 $\omega^{[\Omega_{c1}-\epsilon,\Omega_{c2}]}(t)$ 。ϵ 是所论频域的最小分辨单位。

5. 将频带上限由 Ω_{c2} 改变为 $\Omega_{c2}+\epsilon$，在扩展的频带 $[\Omega_{c1}\ \Omega_{c2}+\epsilon]$ 中重复步骤上述 1 到步骤 3，计算出频带扩展后的内禀相位函数 $\varphi^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}+\epsilon]}(t)$ 和内禀瞬时频率 $\omega^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}+\epsilon]}(t)$ 。ϵ 是所论频域的最小分辨单位。

迭代上述过程，直到下面的条件满足：

若在整个时间段中，恒有 $\omega^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}(t) > 0$，而 $\omega^{[\Omega_{c1}-\epsilon,\Omega_{c2}]}(t)$ 和 $\omega^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}+\epsilon]}(t)$ 都不满足这一条件，会出现负值，则称 $\Psi_u^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}(t)$ 是在频带 $[\Omega_{c1}, \Omega_{c2}]$ 中的正频本征模态函数。若在整个时间段中，恒有 $\omega^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}(t) < 0$，而 $\omega^{[\Omega_{c1}-\epsilon,\Omega_{c2}]}(t)$ 和 $\omega^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}+\epsilon]}(t)$ 都不满足这一条件，会出现正值，则称 $\Psi_u^{[\Omega_{c1},\Omega_{c2}]}(t)$ 是在频带 $[\Omega_{c1}, \Omega_{c2}]$ 中的负频本征模态函数。

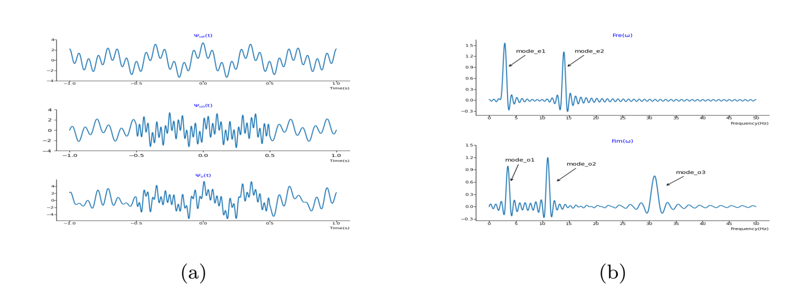
从以上计算过程可以看出，本征模态函数的提取过程在频域具有局部性，允许只关注任何感兴趣的本征模态函数。而且对模态位置的搜索和对模态的提取是同一个过程，这样就大大减小了运算的复杂性。

5.3 对信号的虚实轴分量分别求取模态

在本文介绍算法中，首先在时域中对原始的有限长度实信号要进行奇偶分解，在频域中也分别求取信号的实轴频谱和虚轴频谱。这就说明，如果对信号的实轴分量和虚轴分量分别求取其包含的模态，不仅是可行的，而且是更加有效的途径。这样求取的模态分别称为信号的实轴本征模态和虚轴本征模态。虚实轴模态分解的步骤与上面所述的步骤是类似的，对于单纯的实轴模态或虚轴模态求取内禀相位和内禀瞬时频率的方法已经包含在第4节中。这样得出的全局分解结果得出的模态组仍然具有正交性和唯一性。

5.4 模态分解实例

算例 6： $\Psi_u(t) = 0.6cos(5\pi t) + 1.5cos(6\pi t) + 1.3cos(28\pi t) + sin(7\pi t) + 1.2sin(22\pi t) + a(t) * 1.5sin(62\pi t)$, $t \in [-1, 1]$, 以 100Hz 频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。$a(t)$ 是时域窗口函数，当 $t \in [-0.5, 0.5]$ 时，$a(t) = 1$，其它时间段 $a(t) = 0$。



(a) (b)

图 8: 算例 6 中 $\Psi_u(t)$ 虚实轴时域图像和频谱

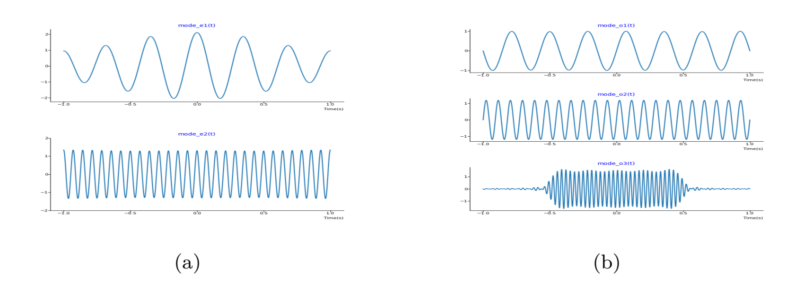
图8(a) 是 $\Psi_u(t)$ 及其实轴分量 $\Psi_{u_e}(t)$ 和虚轴分量 $\Psi_{u_o}(t)$，图8(b) 是其实轴频谱 $Fre(\omega)$ 和虚轴频谱 $Fim(\omega)$。实轴频谱有 2 个主瓣，分别对应着原始信号的两个实轴模态 $mode_d1$ 和 $mode_d2$。其中 $mode_d1$ 包含了低频实轴单谐波分量 $0.6cos(5\pi t)$ 与 $1.5cos(6\pi t)$，这两个单谐波分量的频率接近，成为一个模态。$mode_d2$ 只包含一个单谐波分量 $1.3cos(28\pi t)$。分别选频带区间 [2Hz,3Hz] 和 [13Hz,15Hz] 计算 $mode_d1$ 和 $mode_d2$，实轴各模态计算结果如图9(a)。图8(b) 显示，虚轴频谱 $Fim(\omega)$ 有 3 个主瓣，对应着 3 个虚轴模态 $mode_q1$、$mode_q2$ 和 $mode_q3$，$mode_q1$ 是单谐波分量 $sin(7\pi t)$，$mode_q2$ 是单谐波分量 $1.2sin(22\pi t)$，而 $mode_q3$ 是信号 $a(t) * 1.5sin(62\pi t)$，由于 $mode_q3$ 是时域中的短时信号，其对应的频域主瓣的宽度大于 $mode_q1$ 和 $mode_q2$ 对应的频域主瓣宽度。分别选频带区间 [2.5Hz,3.5Hz]、[10Hz,12Hz]、[26Hz,36Hz]，计算 $mode_q1$、$mode_q2$、$mode_q3$。虚轴各模态计算结果如图9(b)。

在图9中，实轴模态 $mode_d1$ 是调幅波信号，虚轴模态 $mode_q3$ 是短时信号，其余模态都是单谐波信号，计算的结果与计算前的分析是相符的，正交模态分解方法在时域也具有局部性，通常短时信号会成为一个基本模态，如图9中的虚轴模态 $mode_q3$。

6 有限长度的离散信号的非震荡的低频分量的提取

无论是按照传统的关于模态的定义或是本文给出的关于本征模态的定义，模态是具有震荡形态的信号，但是实际的物理信号一般都含有非振荡的低频分量。

在基于整体的模态分解算法中，先逐个提取具有震荡形态的模态，最后剩下的就是非震荡的低频分量。然而本文提出的正交模态分解方法是个体模态的提取方法，可以只提取感兴趣的模态，而不必计算其它模



(a) (b)

图 9: 算例 6 中 $\Psi_u(t)$ 的虚实轴模态分解

态。对于原始信号中的非振荡的低频分量也可直接提取，并且可以尽可能减小提取低频分量的计算量。

如果非振荡的低频分量 imf_0 所在的频带是 $[0, \Omega_{c1}]$，亦即的带宽上限是 Ω_{c1}，可选择新的采样周期 Δ_0，对原始有限长度离散信号 $\boldsymbol{u}$ 的插值函数 $\Psi_u(t)$ 进行重采样。重采样周期 Δ_0 应当满足下面的条件：

$$\Delta < \Delta_0 < \frac{\pi}{\Omega_{c1}}$$

Δ 是原始离散信号 $\boldsymbol{u}$ 的采样周期。重采样周期 Δ_0 应当大于 Δ，但小于由低频带宽确定的上限值 $\frac{\pi}{\Omega_{c1}}$，根据采样定理，重采样后的序列保留了非振荡的低频分量 imf_0 的所有的信息特征。重采样后的序列是：

$$\boldsymbol{u}_0 = [u_0(-l_0), u_0(-l_0+1), \ldots, u_0(0), \ldots, u_0(l_0-1), u_0(l_0)]$$

$\boldsymbol{u}_0$ 的元素都是对原始插值函数 $\Psi_u(t)$ 重新采样得到的样本，$\boldsymbol{u}_0$ 的长度是 $n_0 = 2l_0 + 1$。可采用本文中方程组 (8) 给出的方式，将重采样序列 $\boldsymbol{u}_0$ 也分解成偶子序列 $\boldsymbol{u}_{0e}$ 和奇子序列 $\boldsymbol{u}_{0o}$。可用多项式 $\Psi_{u_{0e}}(t)$ 拟合偶子序列 $\boldsymbol{u}_{0e}$ ，用多项式 $\Psi_{u_{0o}}(t)$ 拟合奇子序列 $\boldsymbol{u}_{0o}$，可设：

$$\begin{aligned} \Psi_{u_{0e}}(t) &= a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + \ldots + a_{l_0} t^{2l_0} \\ \Psi_{u_{0o}}(t) &= b_1 t + b_2 t^3 + b_3 t^5 \ldots + b_{l_0} t^{2l_0-1} \end{aligned} \qquad t \in [-1, 1]$$

其中，$\{a_i | i = 0, 1, \ldots, l_0\}$ 和 $\{b_i | i = 1, \ldots, l_0\}$ 都是实系数。$\Psi_{u_{0e}}(t)$ 具有对称性，$\Psi_{u_{0o}}(t)$ 具有反对称性，只须取整个时间段的一半分析即可，即 $t \in [0, 1]$。

显然 $\Psi_{u_{0e}}(0) = a_0$, 通过下面 l_0 阶线性方程组可求得其它系数 $\{a_i | i = 1, \ldots, l_0\}$：

$$\begin{bmatrix} {\Delta_0}^2 & {\Delta_0}^4 & \ldots & {\Delta_0}^{2l_0} \\ 2^2{\Delta_0}^2 & 2^4{\Delta_0}^4 & \ldots & 2^{2l_0}{\Delta_0}^{2l_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {l_0}^2{\Delta_0}^2 & {l_0}^4{\Delta_0}^4 & \ldots & {l_0}^{2l_0}{\Delta_0}^{2l_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{l_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{u_{0e}}(\Delta_0) \\ \Psi_{u_{0e}}(2\Delta_0) \\ \vdots \\ \Psi_{u_{0e}}(l_0\Delta_0) \end{bmatrix} \tag{9}$$

通过下面 l_0 阶线性方程组可求得系数 $\{b_i | i = 1, \ldots, l_0\}$：

$$\begin{bmatrix} \Delta_0 & {\Delta_0}^3 & \ldots & {\Delta_0}^{2l_0-1} \\ 2\Delta_0 & 2^3{\Delta_0}^3 & \ldots & 2^{2l_0-1}{\Delta_0}^{2l_0-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_0\Delta_0 & {l_0}^3{\Delta_0}^3 & \ldots & {l_0}^{2l_0-1}{\Delta_0}^{2l_0-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{l_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{u_{0o}}(\Delta_0) \\ \Psi_{u_{0o}}(2\Delta_0) \\ \vdots \\ \Psi_{u_{0o}}(l_0\Delta_0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

线性方程组（9)、（10）的系数矩阵是满秩的。

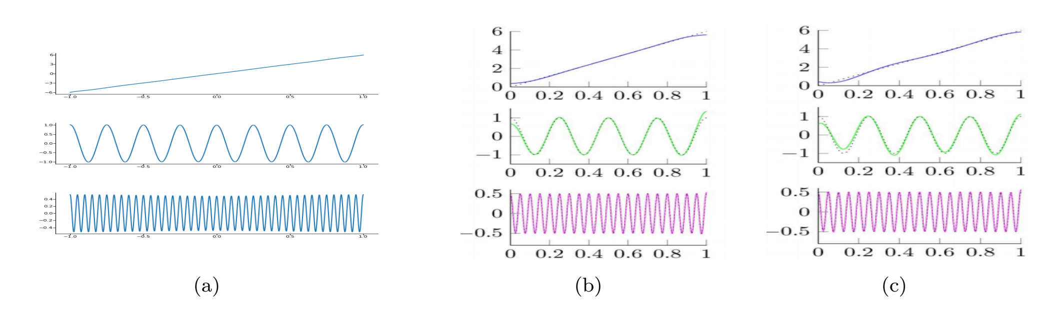
由于重采样周期 Δ_0 只取决于非振荡低频分量的带宽 Ω_{c1}，Δ_0 远大于原始离散信号的采样周期 Δ，线性方程组阶数 l_0 远小于原始离散信号的长度 n 的一半。上述重采样方法减小了计算非振荡低频分量的运算量。

7 正交模态分解方法与其它模态分解方法的比较

本文给出的正交模态分解方法，本质上是一种个体模态的提取算法，这决定了其具有运算量小的特点，且模态分解的结果是唯一的和正交的。这里引用参考文献 [4] 中的一些算例，将正交模态分解方法与传统的经验模态分解（EMD）和变分模态分解 (VMD) 做比较。

算例 7： $\Psi_u(t) = 6t + cos(8\pi t) + 0.5cos(40\pi t) \quad t \in [-1, 1]$, 以 100Hz 的频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。

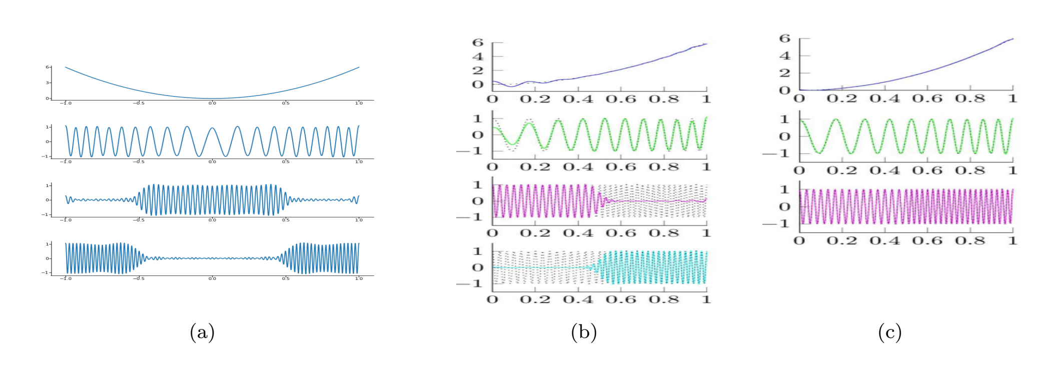
算例 7 引用自参考文献 [4]，文献 [4] 中分别给出了采用 VMD 和 EMD 对 $\Psi_u(t)$ 分解的结果，本文采用正交模态分解。图10给出采用三种方法而得出的结果, 图10(a) 是正交模态分解的结果，图10(b) 是变分模态分解的结果（VMD），图10(c) 是经验模态分解（EMD）的结果。图11(b) 和图11(c) 引自文献 [4]。



(a) (b) (c)

图 10: 针对算例 7 中 $\Psi_u(t)$ 采用三种模态分解方法

算例 8： $\Psi_u(t) = 6t^2 + cos(10\pi |t| + 10\pi t^2) \begin{cases} cos(60\pi t) & -0.5 < t < 0.5 \\ cos(80\pi t - 10\pi) & -1 < t < -0.5 \text{ or } 0.5 < t < 1 \end{cases}$ 以 100Hz 的频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。

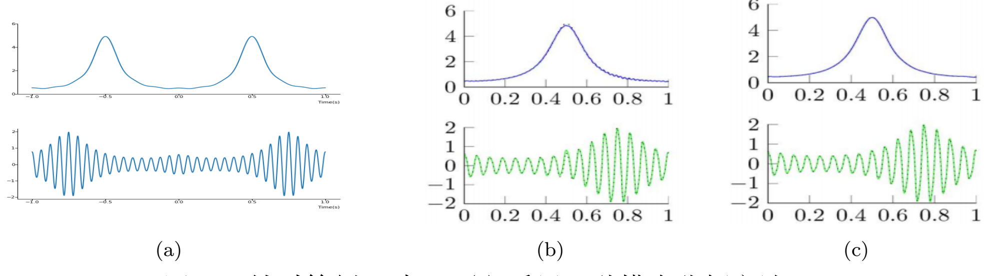


(a) (b) (c)

图 11: 针对算例 8 中 $\Psi_u(t)$ 采用三种模态分解方法

算例 8 引用自参考文献 [4]，文献 [4] 中分别给出了采用 VMD 和 EMD 对 $\Psi_u(t)$ 分解的结果，本文采用正交模态分解。图11给出采用三种方法而得出的结果, 图11(a) 是正交模态分解的结果，图11(b) 是变分模态分解的结果（VMD），图11(c) 是经验模态分解（EMD）的结果。图11(b) 和图11(c) 引自文献 [4]。

算例 9： $\Psi_u(t) = \frac{1}{1.2+cos(2\pi t)} + \frac{cos(32\pi t+0.2cos(64\pi t))}{1.5+sin(2\pi |t|)} \qquad t \in [-1, 1]$, 以 100Hz 的频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。



(a) (b) (c)

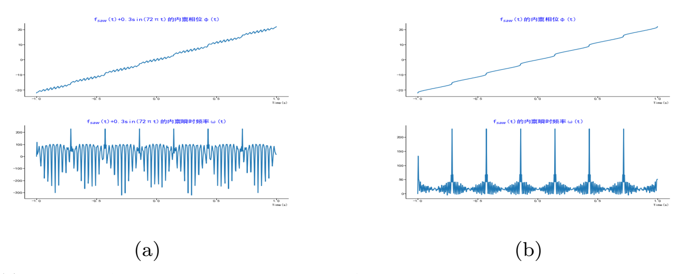
图 12: 针对算例 9 中 $\Psi_u(t)$ 采用三种模态分解方法

算例 9 引用自参考文献 [4]，文献 [4] 中分别给出了采用 VMD 和 EMD 对 $\Psi_u(t)$ 分解的结果，本文采用正交模态分解。图12给出采用三种方法而得出的结果, 图12(a) 是正交模态分解的结果，图12(b) 是变分模态分解的结果（VMD），图12(c) 是经验模态分解（EMD）的结果。图12(b) 和图12(c) 引自文献 [4]。

算例 10： $\Psi_u(t) = f_{saw}(t) + 0.3sin(72\pi t) \qquad t \in [-1, 1]$, 以 276Hz 的频率对 $\Psi_u(t)$ 采样。

在算例 10 中，$\Psi_u(t)$ 包含了锯齿波分量 $f_{saw}(t)$ 和单频分量 $0.3sin(72\pi t)$。$\Psi_u(t)$ 及其包含的锯齿波分量、单频模态分量都是奇函数，在参考文献 [4] 中有相近的算例，分别给出了采用 EMD 和 VMD 进行模态分解的波形。本文采用正交模态分解算法对 $\Psi_u(t)$ 进行模态分解。

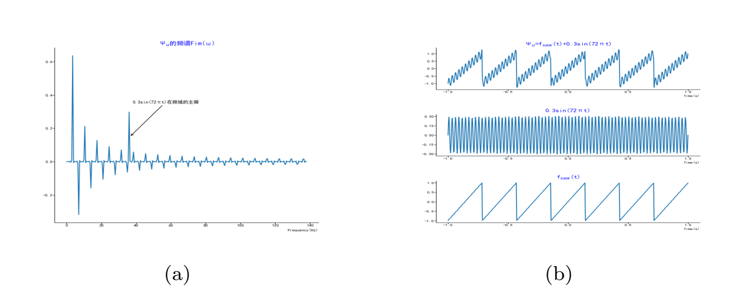
图13(a) 是算例 10 中 $\Psi_u(t)$ 的内禀相位和内禀瞬时频率。由于 $\Psi_u(t)$ 中包含了锯齿波分量 $f_{saw}(t)$ 和单频分量 $0.3sin(72\pi t)$，其内禀相位不是单调的，内禀瞬时频率不满足在整个时间段中“恒为正”这一条件。图13(b) 是锯齿波分量 $f_{saw}(t)$ 的内禀相位和内禀瞬时频率，$f_{saw}(t)$ 的内禀相位是单调的，内禀瞬时频率“恒为正”，$f_{saw}(t)$ 是一个模态，而单频分量 $0.3sin(72\pi t)$ 是另一个模态。



(a) (b)

图 13: 算例 10 中 $f_{saw}(t)$ 的内禀相位单调，而 $\Psi_u(t)$ 不满足这一条件

图14(a) 是 $\Psi_u(t)$ 的频谱，图中显示单频模态 $0.3sin(72\pi t)$ 在频域中的主瓣嵌入在 $f_{saw}(t)$ 的频谱中。采用正交模态分解算法将单频模态 $0.3sin(72\pi t)$ 提取出来，从而比较准确地还原出锯齿波模态 $f_{saw}(t)$，图14(b) 是对 $\Psi_u(t)$ 模态分解的结果。



(a) (b)

图 14: 在频谱中找到单频模态并提取出来，从而恢复出锯齿波

8 结论和展望

世界万事万物都具有波的性质。模态分解是认识波动性的内涵特征、解析波的“基因”的重要方法，对信号处理、数据分析，乃至机器学习等领域都具有深远的基础性作用。以往的模态分解方法 [4, 6] 认为模态是窄带函数，但是没有模态带宽的精确的定义和计算方法，在本文中我们通过对信号的内禀相位和内禀瞬时频率的计算，给出了模态带宽的精确的定义和计算方法，在此基础上正交投影的模态提取方法得以提出，其特点是数学理论严密，能够高效计算，模态分解结果具有唯一性、正交性。通过实际算例还显示，即使在时间段的两端，也能保持较好的模态分解精度，基本克服了传统的模态分解方法所固有的“边界效应”。在我们了解的各种模态计算方法中，该方法是第一个产生这些优秀数学特征的方法。我们将其命名为正交模态分解算法。

对于一段离散实信号，我们引入了与这段离散信号具有相同带宽的插值函数 $\Psi_u(t)$，以及插值函数空间，找到了插值函数空间的正交基。以此得到了正交投影算子，正交投影算子作用在 $\Psi_u(t)$ 上即可求出模态。基于对信号的奇偶分解，我们定义了信号的内禀相位函数和内禀瞬时频率；在保证“内禀瞬时频率恒为正（或恒为负）”这一限制条件下，模态的带宽得以确定。和传统的 EMD 和 VMD 相比，正交模态分解算法具有计算量上的优势：它是一种提取个体模态的算法，可以只提取感兴趣的模态而不计其它模态；另外对信号奇偶分解还帮助我们直接得到离散信号的傅里叶频谱的实部和虚部，而根据实轴频谱和虚轴频谱中主瓣的位置，可以确定模态的中心频率。

考虑到信号分析中的实际需求，通过对插值函数的重采样，可以用较低的计算量拟合出原始信号的低频非震荡分量。

进一步的实验表明，对于长时间段里通过采样得到的实时数据组，正交模态分解算法也仍然是高效的，尤其在对滚动刷新的实时实时数据组。在实时的模态分解的应用场合，由于其对计算效率的要求更高，正交模态分解算法也因此较其他算法具有更大的优势。这些实用领域包括：信号实时滤波，设备故障诊断和物理过程实时建模等。

参考文献

[1] Boualem Boashash. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. i. fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, 80(4):520–538, 1992.

[2] Boualem Boashash. *Time-frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference*. Academic press, 2015.

[3] Ingrid Daubechies, Jianfeng Lu, and Hau-Tieng Wu. Synchrosqueezed wavelet transforms: An empirical mode decomposition-like tool. *Applied and computational harmonic analysis*, 30(2):243–261, 2011.

[4] Konstantin Dragomiretskiy and Dominique Zosso. Variational mode decomposition. *IEEE transactions on signal processing*, 62(3):531–544, 2013.

[5] Yanfei Guo and Zhang. Generalized variational mode decomposition: multiscale and fixed-frequency decomposition algorithm. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 70:1–13, 2021.

[6] N.E. Huang, Z Shen, S.R. Long, and M.C. Wu. The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical, physical and engineering sciences*, 454(1971):903–995, 1998.

[7] Norden E Huang, Zhaohua Wu, Steven R Long, Kenneth C Arnold, Xianyao Chen, and Karin Blank. On instantaneous frequency. *Advances in adaptive data analysis*, 1(02):177–229, 2009.

[8] Zahir M Hussain and Boualem Boashash. Adaptive instantaneous frequency estimation of multi-component fm signals using quadratic time-frequency distributions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(8):1866–1876, 2002.

[9] Jonatan Lerga, Victor Sucic, and Boualem Boashash. An efficient algorithm for instantaneous frequency estimation of nonstationary multicomponent signals in low snr. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2011:1–16, 2011.

[10] Uday Maji and Saurabh Pal. Empirical mode decomposition vs variational mode decomposition on ecg signal processing: A comparative study. In *2016 international conference on advances in computing communications and informatics (ICACCI)*, pages 1129–1134. IEEE, 2016.

[11] Gabriel Rilling and Patrick Flandrin. One or two frequencies? the empirical mode decomposition answers. *IEEE transactions on signal processing*, 56(1):85–95, 2007.